Programme des colles MP
Semaine 17 : 10 au 15 février 2025

1 Cours

Equations différentielles : chapitre « Révisions de MPSI » et chapitre de MP. Révisions sur les exponentielles de matrices.
Intégrales à paramètres : révisions. De nombreux exercices d'intégrales à paramètres aboutissent après dérivation à une équation différentielle.

2 Méthodes, exercices

— Équations différentielles linéaires d'ordre 1 (MPSI) :
  — connaître l'ensemble des solutions de l'équation homogène,
  — avoir bien compris la décomposition d'une solution à l'aide d'une solution particulière et de toutes les solutions de l'équation homogène,
  — savoir trouver des solutions particulières par la méthode de la variation de la constante.
— Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants (révisions de MPSI) :
  — connaître l'ensemble des solutions de l'équation homogène dans le cas complexe et dans le cas réel,
  — avoir bien compris la décomposition d'une solution à l'aide d'une solution particulière et de toutes les solutions de l'équation homogène,
  — savoir trouver des solutions particulières dans trois situations : second membre polynomial, second membre Ae^{rx}, second membre $B\cos(\omega x)$ ou $B\sin(\omega x)$.
— Bien connaître la structure de l'ensemble des solutions de $X' = A(t)X + B(t)$. Bien connaître le théorème de Cauchy linéaire pour $X' = A(t)X + B(t)$. Savoir passer les deux résultats précédents au cadre des équations différentielles scalaires d'ordre n.
— Pour une équation différentielle scalaire linéaire d'ordre 2, penser au wronskien pour caractériser une base, à partir de deux solutions de $\mathcal{S}_H$.
— Pour une équation différentielle scalaire linéaire d'ordre 2, savoir la remettre sous la forme :

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a(t) & b(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}$$

et trouver une solution particulière par la méthode de la variation des constantes.
— Dans le cas du système différentiel homogène $X' = AX$, connaître la résolution avec exponentielle de matrice, ainsi que la résolution avec diagonalisation de A.

3 Questions de cours

1. En admettant le théorème de Cauchy linéaire, donner (et démontrer) la structure de l'ensemble des solutions de $X' = A(t)X + B(t)$.
2. B.E.O. n° 31 (voir ci-dessous)
3. B.E.O. n° 74 (voir ci-dessous).
4. *Uniquement Hadrien, Mouhamadou, les deux Ryan.* Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $f : t \mapsto e^{tA}$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et $f'(t) = Ae^{tA}$.

Exemples d'exercices (en plus, pas spécifiquement au programme des khôlles, pour indication)

B.E.O. numéros 32 (séries entières), 42, 75 (avec matrice).

Énoncé exercice 31

1. Déterminer une primitive de $x \longmapsto \cos^4 x$.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' + y = \cos^3 x$ en utilisant la méthode de variation des constantes.

1. On linéarise $\cos^4 x$.

$$\begin{aligned}\cos^4 x &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4 = \frac{1}{2^4}(e^{4ix}+4e^{2ix}+6+4e^{-2ix}+e^{-i4x})\\ &= \frac{1}{2^4}(2\cos(4x)+8\cos(2x)+6) = \frac{1}{8}\left(\cos(4x)+4\cos(2x)+3\right)\end{aligned}$$

Donc, $x \longmapsto \dfrac{1}{32}\sin(4x) + \dfrac{1}{4}\sin(2x) + \dfrac{3}{8}x$ est une primitive de $x \longmapsto \cos^4 x$.

2. Notons (E) l'équation différentielle $y'' + y = \cos^3 x$.
C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
On pose $f_1(x) = \cos x$ et $f_2(x) = \sin x$. On a $\mathcal{S}_H = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$.
On recherche une solution particulière par la méthode de variation des constantes. Pour cela, on met le système sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \cos^3(x) \end{pmatrix}}_{=B}$$

On cherche la solution particulière sous la forme $Y(x) = \lambda(x)\underbrace{\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_1'(x) \end{pmatrix}}_{=Y_1} + \mu(x)\underbrace{\begin{pmatrix} f_2(x) \\ f_2'(x) \end{pmatrix}}_{=Y_2}$.

$$\begin{aligned} Y' = AY + B &\Leftrightarrow \lambda' Y_1 + \lambda Y_1' + \mu' Y_2 + \mu Y_2' = AY + B \\ &\Leftrightarrow \lambda' Y_1 + \mu' Y_2 = B \\ &\Leftrightarrow \lambda'(x)\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_1'(x) \end{pmatrix} + \mu'(x)\begin{pmatrix} f_2(x) \\ f_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos^3(x) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

On cherche donc λ et μ tels que $\begin{cases} \lambda'(x)\cos(x) + \mu'(x)\sin(x) & = 0 \\ -\lambda'(x)\sin(x) + \mu'(x)\cos(x) & = \cos^3(x) \end{cases}$.
$(\cos x)L_2 + (\sin x)L_1$ donne $\mu'(x) = \cos^4(x)$.
$(\cos x)L_1 - (\sin x)L_2$ donne $\lambda'(x) = -\sin(x)\cos^3(x)$.
$\lambda(x) = \dfrac{1}{4}\cos^4 x$ convient.

D'après la question 1., $\mu(x) = \dfrac{1}{32}\sin(4x) + \dfrac{1}{4}\sin(2x) + \dfrac{3}{8}x$ convient.
On en déduit que la fonction y_p définie par $y_p(x) = \dfrac{1}{4}\cos^5 x + \left(\dfrac{1}{32}\sin(4x) + \dfrac{1}{4}\sin(2x) + \dfrac{3}{8}x\right)\sin x$ est une solution particulière de (E).
Finalement, les solutions de l'équation (E) sont les fonctions y définies par :

$$y(x) = \lambda\cos x + \mu\sin x + y_p(x), \text{ avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

Énoncé exercice 74

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Justifier sans calcul que A est diagonalisable.
   (b) Déterminer les valeurs propres de A puis une base de vecteurs propres associés.
2. On considère le système différentiel $\begin{cases} x' = x + 2z \\ y' = y \\ z' = 2x + z \end{cases}$, x, y, z désignant trois fonctions de la variable t, dérivables sur $\mathbb{R}$.
En utilisant la question 1. et en le justifiant, résoudre ce système.

Corrigé exercice 74

1. (a) A est symétrique réelle donc diagonalisable.

   (b) $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) = \begin{vmatrix} -1+\lambda & 0 & -2 \\ 0 & -1+\lambda & 0 \\ -2 & 0 & -1+\lambda \end{vmatrix}$. En développant par rapport à la première ligne, on obtient, après factorisation :
   $\chi_A = (X-1)(X+1)(X-3)$.
   On obtient $E_1 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, $E_{-1} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ et $E_3 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.
   On pose $e'_1 = (0,1,0)$, $e'_2 = (1,0,-1)$ et $e'_3 = (1,0,1)$. $e' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de vecteurs propres pour l'endomorphisme f canoniquement associé à la matrice A.

2. Notons (S) le système $\begin{cases} x' = x + 2z \\ y' = y \\ z' = 2x + z \end{cases}$.

   Posons $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$. Alors, $(S) \iff X' = AX$.
   On note P la matrice de passage de la base canonique e de $\mathbb{R}^3$ à la base e'.
   D'après 1., $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
   Et, si on pose $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, alors $A = PDP^{-1}$.
   Donc $(S) \iff P^{-1}X' = DP^{-1}X$.

   On pose alors $X_1 = P^{-1}X$ et $X_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix}$.

   Ainsi, par linéarité de la dérivation, $(S) \iff X'_1 = DX_1 \iff \begin{cases} x'_1 & = & x_1 \\ y'_1 & = & -y_1 \\ z'_1 & = & 3z_1 \end{cases}$
   On résout alors chacune des trois équations différentielles d'ordre 1 qui constituent ce système.

   On trouve $\begin{cases} x_1(t) & = & a\mathrm{e}^{t} \\ y_1(t) & = & b\mathrm{e}^{-t} \\ z_1(t) & = & c\mathrm{e}^{3t} \end{cases}$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.
   Enfin, on détermine x, y, z en utilisant la relation $X = PX_1$.
   On obtient : $\begin{cases} x(t) & = & b\mathrm{e}^{-t} + c\mathrm{e}^{3t} \\ y(t) & = & a\mathrm{e}^{t} \\ z(t) & = & -b\mathrm{e}^{-t} + c\mathrm{e}^{3t} \end{cases}$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.