Programme des colles MP
Semaine 16 : 29 janvier au 2 février 2024

1 Cours

Révisions sur les espaces préhilbertiens réels : tout le chapitre (révisions de MPSI).
Endomorphismes d'un espace euclidien : matrices orthogonales, adjoint d'un endomorphisme. Endomorphismes autoadjoints et théorème spectral ; les projecteurs orthogonaux sont les projecteurs autoadjoints ; endomorphismes autoadjoints positifs. Matrices symétriques positives, définies positives.
Isométries vectorielles (définition). Les réductions et classifications des isométries sont pour la semaine d'après.

2 Questions de cours

1. F étant un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, le projeté orthogonal de x sur F est l'unique élément de F qui réalise la distance de x avec F (**schéma obligatoire !**). En dimension finie, projeté orthogonal d'un vecteur sur l'hyperplan $(\mathrm{Vect}(n))^\perp$ et distance de x à $(\mathrm{Vect}(n))^\perp$.
2. En utilisant le théorème de représentation des formes linéaires dans un espace euclidien, existence et unicité de l'adjoint de u, et linéarité.
3. Si F est stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^*.
4. Soit p un projecteur. p est un projecteur orthogonal $\Leftrightarrow p^* = p \Leftrightarrow$ la matrice de p dans une base orthonormée est symétrique.
5. Les sous-espaces propres d'un endomorphisme autoadjoint sont deux à deux orthogonaux.
6. *(Mathis, Marc et Rimi)* Si u est autoadjoint, il existe une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de u.
7. Pour u endomorphisme autoadjoint,
$$u \in \mathcal{S}^+(E) \Leftrightarrow \mathrm{Sp}(u) \subset \mathbf{R}^+ \text{ et } u \in \mathcal{S}^{++}(E) \Leftrightarrow \mathrm{Sp}(u) \subset \mathbf{R}^{+*}$$
8. Soit u un endomorphisme de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :
   (a) u conserve la norme : $\forall x \in E$, $\|u(x)\| = \|x\|$.
   (b) u conserve le produit scalaire : $\forall x, y \in E$, $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.
   (c) u conserve les bases orthonormées : pour $(e_1, \dots, e_n)$ base orthonormée de E, $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une base orthonormée de E.

   On dit alors que u est une *isométrie vectorielle* de E.

Exemples d'exercices (en plus, pas spécifiquement au programme des khôlles, pour indication)

B.E.O. numéros 39, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 92.