Programme des colles MP
Semaine 15 : 27 janvier au 1er février 2025

1 Cours

Moments d'une variable aléatoire réelle discrète : tout le chapitre.

2 Méthodes, exercices

— Être suffisamment à l'aise sur le chapitre Séries entières pour gérer correctement et rapidement des sommes exponentielles, des sommes géométriques dérivées, des intégrales de séries entières, ou encore des sommes pouvant se ramener à

$$-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \text{ pour } x \in]-1,1[$$

— Savoir appliquer le théorème du transfert (cas d'une variable aléatoire ou d'un couple).

— Savoir calculer $V(X_1 + \cdots + X_n)$ quand $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes, et dans le cas plus général avec la bilinéarité de la covariance.

— Savoir calculer rapidement la fonction génératrice d'une variable aléatoire de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson.

— Savoir utiliser les fonctions génératrices pour déterminer des lois, pour calculer des espérances.

3 Questions de cours

1. Formule de calcul de l'espérance par antirépartition.
2. Espérance et variance d'une loi géométrique.
3. Espérance et variance d'une loi de Poisson.
4. *Uniquement Hadrien, Mouhamadou, les deux Ryan, Fodié, Yanis.* Inégalité de Markov.
5. Si X et Y sont indépendantes, à valeurs dans $\mathbf{N}$, $G_{X+Y} = G_X \times G_Y$. Si $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes et à valeurs dans $\mathbf{N}$, alors $G_{X_1+\cdots+X_n} = G_{X_1} G_{X_2} \ldots G_{X_n}$. Application à la détermination de la somme de lois de Poisson indépendantes, à la somme de lois binomiales indépendantes de même paramètre p.
6. B.E.O. n° 96 recopié ci-dessous.

Exemples d'exercices (en plus, pas spécifiquement au programme des khôlles, pour indication)

B.E.O. numéros 97 (couple), 99 (diificile, inégalité de Bienaymé-Tchebychev), 100 (espérance et variance), 102 (gestion d'un minimum), 110 (fonction génératrice).

Énoncé exercice 96 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, de loi de probabilité donnée par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(X = n) = p_n$.

La fonction génératrice de X est notée G_X et elle est définie par $G_X(t) = E[t^X] = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n$.

1. Prouver que l'intervalle $]-1,1[$ est inclus dans l'ensemble de définition de G_X.
2. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   On pose $S = X_1 + X_2$.
   Démontrer que $\forall t \in]-1,1[$, $G_S(t) = G_{X_1}(t)G_{X_2}(t)$:
   (a) en utilisant le produit de Cauchy de deux séries entières.
   (b) en utilisant uniquement la définition de la fonction génératrice.

   Remarque : on admettra, pour la question suivante, que ce résultat est généralisable à n variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.
3. Un sac contient quatre boules : une boule numérotée 0, deux boules numérotées 1 et une boule numérotée 2.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue n tirages successifs, avec remise, d'une boule dans ce sac.
   On note S_n la somme des numéros tirés.
   Soit $t \in]-1,1[$.
   Déterminer $G_{S_n}(t)$ puis en déduire la loi de S_n.

Corrigé exercice 96

1. On considère la série entière $\sum p_n t^n$ et on note R son rayon de convergence.
   La série $\sum p_n$ converge car $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$.
   Donc $\sum p_n t^n$ converge pour $t = 1$, donc $R \geqslant 1$.
   Notons D_{G_X} l'ensemble de définition de G_X.
   On a donc :$]-1,1[\subset D_{G_X}$
2. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   On pose $S = X_1 + X_2$.
   Prouvons que $\forall t \in]-1,1[$, $G_S(t) = G_{X_1}(t)G_{X_2}(t)$.

   (a) **En utlisant le produit de Cauchy de deux séries entières** :

   Notons R_1 le rayon de convergence de la série entière $\sum P(X_1 = n)t^n$.
   Notons R_2 le rayon de convergence de la série entière $\sum P(X_2 = n)t^n$.

   Notons R le rayon de convergence de la série entière produit de Cauchy $\sum c_n t^n$ avec
   $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(X_1 = k)P(X_2 = n-k)$.
   On a, d'après le cours, $R \geqslant \min(R_1, R_2)$ et :
   $\forall t \in]-R,R[$, $\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(X_1 = n)t^n\right)\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(X_2 = n)t^n\right) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} P(X_1 = k)P(X_2 = n-k)\right)t^n$
   Or, on a vu dans la question 1. que $R_1 \geqslant 1$ et $R_2 \geqslant 1$.
   Donc, $R \geqslant 1$.
   Donc, par produit de Cauchy pour les séries entières,
   $\forall t \in]-1,1[$, $\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(X_1 = n)t^n\right)\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(X_2 = n)t^n\right) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} P(X_1 = k)P(X_2 = n-k)\right)t^n.(*)$
   De plus, pour tout entier naturel n,
   $(S = n) = (X_1 + X_2 = n) = \displaystyle\bigcup_{k=0}^{n}((X_1 = k) \cap (X_2 = n-k))$ (union d'événements deux à deux incompatibles).
   Donc : $P(S = n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(X_1 = k)P(X_2 = n-k).(**)$

Donc, d'après (*) et (**), $\forall t \in]-1,1[$, $G_{X_1}(t)G_{X_2}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(S=n)t^n$.

C'est-à-dire, $\forall t \in]-1,1[$, $G_{X_1}(t)G_{X_2}(t) = G_S(t)$.

(b) **En utilisant uniquement la définition de la fonction génératrice** :

Soit $t \in]-1,1[$.
D'après 1., t^{X_1} et t^{X_2} admettent une espérance.
De plus, $G_{X_1}(t) = E[t^{X_1}]$ et $G_{X_2}(t) = E[t^{X_2}]$.
X_1 et X_2 sont indépendantes donc t^{X_1} et t^{X_2} sont indépendantes (par transfert d'indépendance).
Donc $t^{X_1}t^{X_2} = t^S$ admet une espérance et $E[t^S] = E[t^{X_1}]E[t^{X_2}]$.
C'est-à-dire, $G_S(t) = G_{X_1}(t)G_{X_2}(t)$.

3. Soit S_n variable aléatoire égale à la somme des numéros tirés.
Soit $i \in [\![1,n]\!]$.
On note X_i la variable aléatoire égale au numéro tiré au $i^{\text{ème}}$ tirage.
$X_i(\Omega) = \{0,1,2\}$.
De plus, $P(X_i=0) = \frac{1}{4}$, $P(X_i=1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ et $P(X_i=2) = \frac{1}{4}$.

Donc, $\forall t \in]-1,1[$, $G_{X_i}(t) = E[t^{X_i}] = t^0P(X_i=0) + t^1P(X_i=1) + t^2P(X_i=2)$.
Donc, $\forall t \in]-1,1[$, $G_{X_i}(t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}t^2 = \frac{1}{4}(t+1)^2$.

On a : $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$.
De plus, les variables aléatoires $X_1, X_2, ..., X_n$ sont indépendantes.
D'après 2., on en déduit que : $\forall t \in]-1,1[$, $G_{S_n}(t) = G_{X_1}(t)G_{X_2}(t)....G_{X_n}(t)$.
C'est-à-dire, $\forall t \in]-1,1[$, $G_{S_n}(t) = \frac{1}{4^n}(1+t)^{2n}$.
Ou encore, $\forall t \in]-1,1[$, $G_{S_n}(t) = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \frac{1}{4^n} t^k$.
Or, $\forall t \in]-1,1[$, $G_{S_n}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(S_n=k)t^k$.
Donc, par unicité du développement en série entière :
$S(\Omega) = [\![0,2n]\!]$ et $\forall k \in [\![0,2n]\!]$, $P(S_n=k) = \binom{2n}{k}\frac{1}{4^n} = \binom{2n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k}$
Donc, S_n suit une loi binomiale de paramètre $(2n, \frac{1}{2})$.