

Programme des colles MP
Semaine 15 : 22 au 26 janvier 2024

1 Cours

Topologie : tout le chapitre.

Exponentielle de matrices

Révisions sur les espaces préhilbertiens réels : tout le chapitre (révisions de MPSI).

2 Méthodes, exercices

- Savoir utiliser à bon escient le critère de continuité des applications linéaires et bilinéaires. Savoir rechercher la norme d'opérateur d'une application linéaire continue, ou la norme subordonnée d'une matrice.
- Maîtriser la propriété d'image réciproque d'un fermé (d'un ouvert) par une application continue.
- Être à l'aise avec la continuité d'applications classiques sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$: trace, puissances, déterminant.
- Révisions sur les espaces préhilbertiens : produit scalaire, propriétés sur les normes (dont l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le cas d'égalité dans cette inégalité), orthogonalité (dont le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt), existence et utilisation de bases orthonormées. Les projections orthogonales seront pour la semaine suivante.

3 Questions de cours

1. L'image d'un compact par une application continue est un compact.
2. Montrer que $\det : M \mapsto \det(M)$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Montrer que $\text{GL}_n(\mathbf{K})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Montrer que $\overline{\text{GL}_n(\mathbf{K})} = \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$; ainsi $\text{GL}_n(\mathbf{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
3. Savoir définir $\exp(A)$ pour A matrice carrée (en vérifiant aussi que la série introduite converge absolument). Savoir montrer que si A et B sont semblables, alors $\exp(A)$ et $\exp(B)$ sont semblables. Savoir montrer que $f : M \mapsto \exp(M)$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ en utilisant correctement une convergence normale.

Exemples d'exercices (en plus, pas spécifiquement au programme des khôlles, pour indication)

B.E.O. numéros 13, 34, 35, 36, 37, 38, 40, 44, 45 et 54.