

Programme des colles MP

Semaine 14 : 15 au 19 janvier 2024

1 Cours

Révisions : Normes équivalentes. Première et deuxième inégalités triangulaires dans un espace vectoriel normé, dans \mathbf{C} .

Topologie des espaces vectoriels normés

Vocabulaire : Boule, voisinage, ouvert, fermé, intérieur, adhérence, frontière, partie dense, ouverts et fermés relatifs à une partie.

Propriétés : Stabilité par produit, union / union finie, intersection / intersection finie des ouverts, des fermés. Caractérisation séquentielle des points adhérents, caractérisation séquentielle des fermés. Image réciproque d'une partie ouverte ou fermée par une fonction continue.

Continuité : Continuité de $f : A \subset E \rightarrow F$ où E et F sont des espaces vectoriels normés. Uniforme continuité. Applications k -lipschitziennes. Les applications linéaires et multilinéaires avec des espaces de départ de dimension finie sont continues. Critère de continuité des applications linéaires et multilinéaires. Norme d'opérateur, ou norme subordonnée, sur $\mathcal{L}_c(E, F)$: définition et sous-multiplicativité.

2 Questions de cours

1. Une boule ouverte est un ouvert. Une boule fermée est un fermé. Une sphère est un fermé.
2. Un point x de E est adhérent à A si, et seulement si, il existe une suite d'éléments de A convergeant vers x .
3. Montrer que $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} = 0$ et montrer en utilisant la caractérisation séquentielle de la limite que $\frac{xy}{x^2 + y^2}$ n'admet pas de limite en 0.
4. Montrer que les applications $x \mapsto \|x\|$ et $x \mapsto d(x, A)$ sont 1-lipschitziennes sur E ; ces applications sont donc continues sur E .

Exemples d'exercices (en plus, pas spécifiquement au programme des khôlles, pour indication)

B.E.O. numéros 34, 35, 36, 37, 38, 40, 45 et 54.