Programme des colles MP
Semaine 14 : 8 au 12 janvier 2024

1 Cours

Probabilités et lois de variables aléatoires discrètes : tout le chapitre.

2 Méthodes, exercices

— Savoir écrire avec $\cap$, $\cup$, complémentaire, un événement et ensuite seulement, passer aux règles de probabilité.

— Repérer quand ils se présentent le corollaire du théorème de continuité monotone ou la propriété de σ-additivité.

— Repérer et rédiger impeccablement les modèles binomial et géométrique s'ils se présentent.

— Quand on dispose de la loi du couple (X, Y), savoir appliquer la formule des probabilités totales pour en déduire la loi de X ou de Y.

3 Questions de cours

1. Sous-additivité : pour $A_1, \ldots, A_n$ événements, $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \leqslant P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$. Dans $[0, +\infty]$, $P(\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} P(A_k) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{+\infty} P(A_k)$. Application : pour $(A_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ suite d'événements négligeables, la réunion des A_k est encore négligeable. L'intersection dénombrable d'événements presque-certains est un événement presque-certain.
2. B.E.O. n° 98 recopié ci-dessous.
3. B.E.O. n° 107 recopié ci-dessous.
4. Extrait du B.E.O. n° 108 recopié ci-dessous.

Exemples d'exercices (en plus, pas spécifiquement au programme des khôlles, pour indication)
B.E.O. n$^{\text{os}}$ 95, 101, 102, 103, 105, 109, 111.

Énoncé exercice 98
Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts. On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p ($p \in]0, 1[$).
Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1. Donner la loi de X. Justifier.
2. La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.
   (a) Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $P_{(X=i)}(Y = k)$.
   (b) Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre. **Indication** : on pourra utiliser, sans la prouver, l'égalité suivante : $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$.

Corrigé exercice 98

1. L'expérience est la suivante : l'épreuve de l'appel téléphonique de la secrétaire vers un correspondant est répétée n fois et ces n épreuves sont mutuellement indépendantes.
   De plus, chaque épreuve n'a que deux issues possibles : le correspondant est joint avec la probabilité p (succès) ou le correspondant n'est pas joint avec la probabilité $1 - p$ (échec).

La variable X considérée représente le nombre de succès et suit donc une loi binomiale de paramètres (n, p).
C'est-à-dire $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et $\forall k \in [\![0, n]\!]$ $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

2. (a) Soit $i \in [\![0, n]\!]$.
Sous la condition $(X = i)$, la secrétaire rappelle $n - i$ correspondants lors de la seconde série d'appels. Comme cette nouvelle série d'appels se fait dans les mêmes conditions que pour la question 1., sauf pour le nombre de répétitions qui est maintenant égal à $n - i$, alors on se retrouve dans le schéma d'une loi binomiale de paramètre $(n - i, p)$. Donc

$$P_{(X=i)}(Y = k) = \begin{cases} \binom{n-i}{k} p^k (1-p)^{n-i-k} \text{ si } k \in [\![0, n-i]\!] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

(b) $Z(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et $\forall k \in [\![0, n]\!]$ $P(Z = k) = \sum_{i=0}^{k} P((X = i) \cap (Y = k - i)) = \sum_{i=0}^{k} P_{(X=i)}(Y = k - i) P(X = i)$.
Soit $k \in [\![0, n]\!]$. D'après les questions précédentes, $P(Z = k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n-i}{k-i} \binom{n}{i} p^k (1-p)^{2n-k-i}$.
Or, d'après l'indication, $\binom{n-i}{k-i} \binom{n}{i} = \binom{k}{i} \binom{n}{k}$.
Donc $P(Z = k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{2n-k-i} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{2n-k} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{1}{1-p}\right)^i$.
Donc d'après le binôme de Newton, $P(Z = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{2n-k} \left(\frac{2-p}{1-p}\right)^k = \binom{n}{k} (p(2-p))^k \left((1-p)^2\right)^{n-k}$.
On vérifie que $1 - p(2 - p) = (1 - p)^2$ et donc on peut conclure que :
Z suit une loi binomiale de paramètre $(n, p(2 - p))$.

Énoncé exercice 107

On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires.
L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.
On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes : on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie. On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient. Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1. Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la boule tirée au $n^{\text{ième}}$ tirage est blanche » et on pose $p_n = P(B_n)$.

1. Calculer p_1.
2. Prouver que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35} p_n + \dfrac{4}{7}$.
3. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n.

Corrigé exercice 107

1. Notons U_1 l'événement le premier tirage se fait dans l'urne U_1.
Notons U_2 l'événement le premier tirage se fait dans l'urne U_2.
(U_1, U_2) est un système complet dévénements.
Donc d'après la formule des probabilités totales, $p_1 = P(B_1) = P_{U_1}(B_1)P(U_1) + P_{U_2}(B_1)P(U_2)$.
Donc $p_1 = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{4}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{17}{35}$
On a donc $p_1 = \frac{17}{35}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$(B_n, \overline{B_n})$ est un système complet d'événements.
Donc, d'après la formule des probabilités totales, $P(B_{n+1}) = P_{B_n}(B_{n+1})P(B_n) + P_{\overline{B_n}}(B_{n+1})P(\overline{B_n})$.
Alors en tenant compte des conditions de tirage, on a $p_{n+1} = \frac{2}{5} p_n + \frac{4}{7}(1 - p_n)$.
Donc, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. $p_{n+1} = -\frac{6}{35} p_n + \frac{4}{7}$.

3. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\frac{6}{35} p_n + \frac{4}{7}$.
Donc $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite arithmético-géométrique.
On résout l'équation $\ell = -\frac{6}{35}\ell + \frac{4}{7}$ et on trouve $\ell = \frac{20}{41}$.

On considère alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = p_n - \ell$.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $-\frac{6}{35}$, donc, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left(-\frac{6}{35}\right)^{n-1} u_1$.
Or $u_1 = p_1 - \ell = \frac{17}{35} - \frac{20}{41} = -\frac{3}{1435}$.
On en déduit que, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = -\frac{3}{1435}\left(-\frac{6}{35}\right)^{n-1} + \frac{20}{41}$.

Énoncé exercice 108

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi du couple (X, Y) est donnée par :

$$\forall\, (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ P((X=i)\cap(Y=j)) = \frac{1}{\mathrm{e}\, 2^{i+1} j!}$$

1. Déterminer les lois de X et de Y.
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Calculer $P(X = Y)$.

Corrigé exercice 108

1. $\forall\, (i,j) \in \mathbb{N}^2$, $P((X=i)\cap(Y=j)) = \dfrac{1}{\mathrm{e}\, 2^{i+1} j!}$.
   $X(\Omega) = \mathbb{N}$.
   Soit $i \in \mathbb{N}$.
   $\displaystyle\sum_{j\geqslant 0} \frac{1}{\mathrm{e}\, 2^{i+1} j!} = \frac{1}{\mathrm{e}\, 2^{i+1}} \sum_{j\geqslant 0} \frac{1}{j!}$ converge et $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}\, 2^{i+1} j!} = \frac{1}{2^{i+1}}$.
   Or $P(X=i) = \displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} P((X=i)\cap(Y=j))$ donc $P(X=i) = \displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}2^{i+1} j!} = \frac{1}{\mathrm{e}2^{i+1}} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} = \frac{1}{2^{i+1}}$.
   Conclusion : $\forall\, i \in \mathbb{N}$, $P(X=i) = \dfrac{1}{2^{i+1}}$.
   $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.

   Soit $j \in \mathbb{N}$.
   $\displaystyle\sum_{i\geqslant 0} \frac{1}{\mathrm{e}\, 2^{i+1} j!} = \frac{1}{2\mathrm{e}j!} \sum_{i\geqslant 0} \left(\frac{1}{2}\right)^i$ converge (série géométrique de raison $\frac{1}{2}$) et $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}\, 2^{i+1} j!} = \frac{1}{2\mathrm{e}j!} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\mathrm{e}j!}$.
   Or $P(Y=j) = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} P((X=i)\cap(Y=j))$.
   Donc $P(Y=j) = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}2^{i+1} j!} = \frac{1}{2\mathrm{e}j!} \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{2\mathrm{e}j!} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\mathrm{e}j!}$.
   Conclusion : $\forall\, j \in \mathbb{N}$, $P(Y=j) = \dfrac{1}{\mathrm{e}j!}$.
2. On a : $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2$, $P((X=i)\cap(Y=j)) = P(X=i)P(Y=j)$. Donc les variables X et Y sont indépendantes.
3. $(X=Y) = \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{N}} ((X=k)\cap(Y=k))$ et il s'agit d'une union d'événements deux à deux incompatibles donc :

   $$P(X=Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} P((X=k)\cap(Y=k)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}2^{k+1}} \frac{1}{k!} = \frac{1}{2\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!} = \frac{1}{2\mathrm{e}} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$$

   Donc $P(X=Y) = \dfrac{1}{2\sqrt{\mathrm{e}}}$.