Programme des colles MP
Semaine 13 : 13 au 18 janvier 2025

1 Cours

Probabilités et lois de variables aléatoires discrètes : tout le chapitre.

2 Méthodes, exercices

— Savoir écrire avec $\cap$, $\cup$, complémentaire, un événement et ensuite seulement, passer aux règles de probabilité.

— Repérer quand ils se présentent le corollaire du théorème de continuité monotone ou la propriété de σ-additivité.

— Repérer et rédiger **impeccablement** les modèles binomial et géométrique s'ils se présentent.

— Quand on dispose de la loi du couple (X, Y), savoir appliquer la formule des probabilités totales pour en déduire la loi de X ou de Y.

3 Questions de cours

1. Démonstration du fait que l'on définit une loi de variable aléatoire réelle en posant, pour $p \in]0,1[$, $P(X = k) = (1-p)^{k-1}p$ pour $k \in \mathbf{N}^*$. Démonstration du modèle du temps d'attente.
2. B.E.O. n° 98 recopié ci-dessous.
3. Extrait du B.E.O. n° 108 recopié ci-dessous.

Exemples d'exercices (en plus, pas spécifiquement au programme des khôlles, pour indication)
B.E.O. n$^{\text{os}}$ 95, début de l'exercice 97, deux premières questions de l'exercice 100, 101, 102 (plus difficile), 103 hors questions d'espérance et variance, 105, 106 hors questions d'espérance et variance, 107, 109, 111.

Énoncé exercice 98
Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts. On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p ($p \in]0,1[$).
Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1. Donner la loi de X. Justifier.
2. La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.
   (a) Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $P_{(X=i)}(Y = k)$.
   (b) Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre. **Indication** : on pourra utiliser, sans la prouver, l'égalité suivante : $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$.
   (c) *Bonus :* Déterminer l'espérance et la variance de Z.

Corrigé exercice 98

1. L'expérience est la suivante : l'épreuve de l'appel téléphonique de la secrétaire vers un correspondant est répétée n fois et ces n épreuves sont mutuellement indépendantes.
   De plus, chaque épreuve n'a que deux issues possibles : le correspondant est joint avec la probabilité p (succès) ou le correspondant n'est pas joint avec la probabilité $1-p$ (échec).
   La variable X considérée représente le nombre de succès et suit donc une loi binomiale de paramètres (n, p).
   C'est-à-dire $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et $\forall k \in [\![0, n]\!]$ $P(X = k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

2. (a) Soit $i \in [\![0, n]\!]$.
Sous la condition $(X = i)$, la secrétaire rappelle $n - i$ correspondants lors de la seconde série d'appels. Comme cette nouvelle série d'appels se fait dans les mêmes conditions que pour la question 1., sauf pour le nombre de répétitions qui est maintenant égal à $n - i$, alors on se retrouve dans le schéma d'une loi binomiale de paramètre $(n - i, p)$. Donc

$$P_{(X=i)}(Y = k) = \begin{cases} \dbinom{n-i}{k} p^k (1-p)^{n-i-k} \text{ si } k \in [\![0, n-i]\!] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

(b) $Z(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et $\forall k \in [\![0, n]\!]$ $P(Z = k) = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} P((X = i) \cap (Y = k - i)) = \sum_{i=0}^{k} P_{(X=i)}(Y = k - i)P(X = i)$.

Soit $k \in [\![0, n]\!]$. D'après les questions précédentes, $P(Z = k) = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} p^k (1-p)^{2n-k-i}$.

Or, d'après l'indication, $\dbinom{n-i}{k-i}\dbinom{n}{i} = \dbinom{k}{i}\dbinom{n}{k}$.

Donc $P(Z = k) = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}\binom{n}{k} p^k (1-p)^{2n-k-i} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{2n-k} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{1}{1-p}\right)^i$.

Donc d'après le binôme de Newton, $P(Z = k) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{2n-k} \left(\dfrac{2-p}{1-p}\right)^k = \dbinom{n}{k} (p(2-p))^k \left((1-p)^2\right)^{n-k}$.

On vérifie que $1 - p(2 - p) = (1 - p)^2$ et donc on peut conclure que :
Z suit une loi binomiale de paramètre $(n, p(2 - p))$.

(c) D'après le cours, comme Z suit une loi binomiale de paramètre $(n, p(2 - p))$, alors :
$E(Z) = np(2 - p)$ et $V(Z) = np(2 - p)\,(1 - p(2 - p)) = np(2 - p)(p - 1)^2$.

Énoncé exercice 108

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi du couple (X, Y) est donnée par :

$$\forall\, (i, j) \in \mathbb{N}^2,\ P((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{1}{\mathrm{e}\ 2^{i+1} j!}$$

1. Déterminer les lois de X et de Y.
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Calculer $P(X = Y)$.

Corrigé exercice 108

1. $\forall\, (i, j) \in \mathbb{N}^2$, $P((X = i) \cap (Y = j)) = \dfrac{1}{\mathrm{e}\ 2^{i+1} j!}$.
$X(\Omega) = \mathbb{N}$.
Soit $i \in \mathbb{N}$.
$\displaystyle\sum_{j\geqslant 0} \frac{1}{\mathrm{e}\ 2^{i+1} j!} = \frac{1}{\mathrm{e}\ 2^{i+1}} \sum_{j\geqslant 0} \frac{1}{j!}$ converge et $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}\ 2^{i+1} j!} = \frac{1}{2^{i+1}}$.
Or $P(X = i) = \displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} P((X = i) \cap (Y = j))$ donc $P(X = i) = \displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}2^{i+1} j!} = \frac{1}{\mathrm{e}2^{i+1}} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} = \frac{1}{2^{i+1}}$.
Conclusion : $\forall\, i \in \mathbb{N}$, $P(X = i) = \dfrac{1}{2^{i+1}}$.
$Y(\Omega) = \mathbb{N}$.

Soit $j \in \mathbb{N}$.
$\displaystyle\sum_{i\geqslant 0} \frac{1}{\mathrm{e}\ 2^{i+1} j!} = \frac{1}{2\mathrm{e}j!} \sum_{i\geqslant 0} \left(\frac{1}{2}\right)^i$ converge (série géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$) et $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}\ 2^{i+1} j!} = \frac{1}{2\mathrm{e}j!} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\mathrm{e}j!}$.
Or $P(Y = j) = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} P((X = i) \cap (Y = j))$.

Donc $P(Y=j)=\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{\mathrm{e}2^{i+1}j!}=\frac{1}{2\mathrm{e}j!}\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^i=\frac{1}{2\mathrm{e}j!}\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\mathrm{e}j!}$.

Conclusion : $\forall\, j\in\mathbb{N},\ P(Y=j)=\frac{1}{\mathrm{e}j!}$.

2. On a : $\forall\,(i,j)\in\mathbb{N}^2,\ P((X=i)\cap(Y=j))=P(X=i)P(Y=j)$. Donc les variables X et Y sont indépendantes.
3. $(X=Y)=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}((X=k)\cap(Y=k))$ et il s'agit d'une union d'événements deux à deux incompatibles donc :

   $$P(X=Y)=\sum_{k=0}^{+\infty}P((X=k)\cap(Y=k))=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{\mathrm{e}2^{k+1}}\frac{1}{k!}=\frac{1}{2\mathrm{e}}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!}=\frac{1}{2\mathrm{e}}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$$

   Donc $P(X=Y)=\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{e}}}$.