

Programme des colles MP
Semaine 12 : 18 au 22 décembre 2023

1 Cours

Suites et séries de fonctions à valeurs dans \mathbf{R} ou \mathbf{C} : tout, y compris les approximations uniformes.

Probabilités : jusqu'à la page 10, comprise.

2 Méthodes, exercices

- Savoir montrer une convergence simple ou uniforme d'une SUITE de fonctions. Savoir prendre l'initiative d'une restriction d'intervalle pour obtenir une convergence uniforme (par exemple, pour le théorème de transmission de continuité).
- Savoir montrer une convergence simple, une convergence normale, une convergence uniforme pour une SÉRIE de fonctions. Reconnaître en particulier les séries alternées s'il y en a !
- Savoir rédiger les différents théorèmes d'interversions (double limite, limite-dérivation ou dérivation terme à terme, limite-intégrale ou intégration terme à terme).
- **Tout exercice sur les coefficients binomiaux** (travail personnel).
- Savoir effectuer des dénombrements scolaires (« listes ou parties...? »). On attend des étudiants qu'ils sachent passer du problème concret à l'enregistrement mathématique sous forme de listes, d'ensembles, et qu'ils présentent, si cela s'y prête, une énumération bien ordonnée.

3 Questions de cours

1. Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ et à valeurs dans \mathbf{R} telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\int_0^1 x^n f(x) dx = 0$.
Montrer que f est la fonction nulle.
2. Démonstration combinatoire de la formule de Vandermonde.
3. Exercice à savoir refaire : On effectue une succession infinie de lancers d'une pièce équilibrée. On admet qu'il existe une tribu $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ et une probabilité P sur (Ω, \mathcal{A}) qui coïncide avec la probabilité uniforme sur l'univers correspondant aux n premiers lancers, pour tout n .
 A_n désigne l'événement « les n premiers lancers donnent tous Face ».
 - (a) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Calculer la probabilité de A_n .
 - (b) Soit A l'événement « on obtient toujours face ». Calculer sa probabilité. Comment appelle-t-on un tel événement ?
4. Exercice à savoir refaire :
On lance indéfiniment une pièce donnant Pile avec probabilité $p \in]0; 1[$ et Face avec probabilité $q = 1 - p$. On note S_k l'événement « on obtient Pile pour la première fois au k^{e} lancer ».
 - (a) Calculer la probabilité de l'événement A « on obtient au moins une fois Pile » en utilisant les événements S_k .
 - (b) Soit B l'événement « on obtient Pile pour la première fois au bout d'un nombre pair de lancers ». Montrer que $P(B) = \frac{q}{1+q}$.

Exemples d'exercices (en plus, pas spécifiquement au programme des khôlles, pour indication)
B.E.O. n^{os} 95, 101, 107, 112.