Programme des colles MP
Semaine 12 : 6 au 11 janvier 2025

1 Cours

Topologie des espaces vectoriels normés : tout le chapitre sauf les connexes par arcs.
Probabilités et variables aléatoires (révisions) : chapitre jusqu'à la page 15 comprise.

2 Questions de cours

1. B.E.O. n° 13
   (a) Rappelerla définition, par les suites de vecteurs, d'une partie compacte d'un espace vectoriel normé.
   (b) Démontrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est une partie fermée de cet espace.
   (c) Démontrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est une partie bornée de cet espace. **Indication** : On pourra raisonner par l'absurde.
   (d) On se place sur $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\| \|_1$ définie pour tout polynôme $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ de E par : $\|P\|_1 = \sum_{i=0}^{n} |a_i|$.
      i. Justifier que $S(0,1) = \{P \in \mathbb{R}[X] \ / \ \|P\|_1 = 1\}$ est une partie fermée et bornée de E.
      ii. Calculer $\|X^n - X^m\|_1$ pour m et n entiers naturels distincts. $S(0,1)$ est-elle une partie compacte de E ? Justifier.
2. L'image d'un compact par une application continue est un compact.
3. *Uniquement Hadrien, Mouhamadou, les deux Ryan, Fodié, Yanis.* Montrer que $\det : M \mapsto \det(M)$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Montrer que $\overline{\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})} = \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$; ainsi $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
4. Savoir définir $\exp(A)$ pour A matrice carrée (en vérifiant aussi que la série introduite converge absolument). Savoir montrer que si A et B sont semblables, alors $\exp(A)$ et $\exp(B)$ sont semblables.
   Uniquement Hadrien, Mouhamadou, les deux Ryan, Fodié, Yanis. Savoir montrer que $f : M \mapsto \exp(M)$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ en utilisant correctement une convergence normale.
5. B.E.O. n° 107
   On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
   L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires.
   L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.
   On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :
   on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.
   On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.
   Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1.
   Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la boule tirée au $n^{\text{ième}}$ tirage est blanche » et on pose $p_n = P(B_n)$.
   (a) Calculer p_1.
   (b) Prouver que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$.
   (c) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n.

Exemples d'exercices (en plus, pas spécifiquement au programme des khôlles, pour indication)

B.E.O. numéros 1 (continuité), 34 (adhérence), 35 (caractérisation séquentielle de la continuité), 36 (continuité d'une application linéaire), 37 (normes, ouverts), 38 (norme d'opérateur), 40 (norme, continuité), 44 (adhérence), 45 (adhérence), 54 (continuité d'une application linéaire), 58 (continuité d'une application bilinéaire), 61 (révisions : norme, série).

Corrigé exercice 13

(a) Une partie A d'un espace vectoriel normé $(E, \| \|)$ est une partie compacte si et seulement si pour toute suite (x_n) à valeurs dans A on peut extraire une sous-suite qui converge dans A. C'est-à-dire A est une partie compacte si et seulement pour toute suite (x_n) à valeurs dans A il existe $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement

croissante telle que $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ converge vers $\ell \in A$.
Remarque : $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ étant strictement croissante, on a, par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geqslant n$.

(b) Soit $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé. Soit A une partie compacte de E. Montrons que A est une partie fermée de E. C'est-à-dire montrons que toute suite à valeurs dans A qui converge, converge dans A.
Soit (x_n) une suite à valeurs dans A telle que (x_n) converge vers ℓ.
A est une partie compacte donc il existe $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ converge vers $\ell' \in A$. Or, (x_n) converge vers ℓ donc $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ converge vers ℓ (sous-suite de (x_n)).
Par unicité de la limite, $\ell' = \ell$. Or, $\ell' \in A$,donc $\ell \in A$.

(c) Soit $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé. Soit A une partie compacte de E. Montrons que A est une partie bornée de E. Raisonnons par l'absurde. Supposons que A soit non bornée.
C'est-à-dire, $\forall M \in \mathbb{R}$, $\exists\, x \in A \,/\, \|x\| > M$.
Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x_n \in A \,/\, \|x_n\| > n \quad (*)$
(x_n) est une suite à valeurs dans A et A est une partie compacte de E donc il existe $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ converge vers $\ell \in A$.
Donc, d'après $(*)$, $\forall n \in \mathbb{N}, \|x_{\varphi(n)}\| > \varphi(n) \geqslant n$. Donc, $\lim\limits_{n \to +\infty} \|x_{\varphi(n)}\| = +\infty$.
Absurde car $(x_{\varphi(n)})$ converge donc $(x_{\varphi(n)})$ est bornée.

(d) Posons $S = S(0, 1)$.

i. $\forall x \in S$, $\|x\| = 1$ donc S est bornée.

Soit $f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \|x\| \end{array}$ f est continue sur E.
Or, $S = f^{-1}(1)$ et $\{1\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$ donc S est une partie fermée de E, en tant qu'image réciproque par une application continue d'un fermé.

ii. Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $m \neq n$.
$\|X^n - X^m\|_1 = 2$.
Supposons que S soit une partie compacte de E. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|X^n\|_1 = 1$, donc (X_n) est une suite à valeurs dans S.
Or, S est une partie compacte de E, donc il existe $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\left(X^{\varphi(n)}\right)$ converge vers $\ell \in S$.
Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \|X^{\varphi(n)} - X^{\varphi(n+1)}\|_1 = \|\ell - \ell\| = 0$, ce qui contredit le fait que :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $\|X^{\varphi(n)} - X^{\varphi(n+1)}\|_1 = 2$.
Donc S est non compact.

Corrigé exercice 107

(a) Notons U_1 (resp. U_2) l'événement « le premier tirage se fait dans l'urne U_1 (resp. U_2) ». (U_1, U_2) est un système complet d'événements.
Donc d'après la formule des probabilités totales, $p_1 = P(B_1) = P_{U_1}(B_1)P(U_1) + P_{U_2}(B_1)P(U_2)$.
Donc $p_1 = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{4}{7} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{17}{35}$. On a donc $p_1 = \dfrac{17}{35}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $(B_n, \overline{B_n})$ est un système complet d'événements.
Donc, d'après la formule des probabilités totales, $P(B_{n+1}) = P_{B_n}(B_{n+1})P(B_n) + P_{\overline{B_n}}(B_{n+1})P(\overline{B_n})$.
Alors en tenant compte des conditions de tirage, on a $p_{n+1} = \dfrac{2}{5}p_n + \dfrac{4}{7}(1 - p_n)$.
Donc, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$.

(c) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$.
Donc $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite arithmético-géométrique. On résout l'équation $\ell = -\dfrac{6}{35}l + \dfrac{4}{7}$ et on trouve $\ell = \dfrac{20}{41}$.
On considère alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = p_n - \ell$.
$(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $-\dfrac{6}{35}$, donc, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left(-\dfrac{6}{35}\right)^{n-1} u_1$.
Or $u_1 = p_1 - \ell = \dfrac{17}{35} - \dfrac{20}{41} = -\dfrac{3}{1435}$. On en déduit que, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = u_n + \ell$, c'est-à-dire $p_n = -\dfrac{3}{1435}\left(-\dfrac{6}{35}\right)^{n-1} + \dfrac{20}{41}$.