

Programme des colles MP
Semaine 11 : 11 au 15 décembre 2023

1 Cours

Suites et séries de fonctions à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} : suites de fonctions (convergence simple, uniforme, et propriétés), séries de fonctions (convergence simple, uniforme, normale, et propriétés).

2 Méthodes, exercices

- Savoir établir une convergence simple, uniforme, normale sur tout segment.
- Savoir montrer qu'une suite de fonctions ne converge pas uniformément : par étude de fonction, par l'absurde, par contraposée des théorèmes de transmission de continuité ou interversion limite intégrale.
- Avoir révisé le théorème spécial des séries alternées, utile à certaines séries de fonctions.

3 Questions de cours

1. Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) , où $f_n : x \mapsto nxe^{-nx}$, sur \mathbb{R}^+ , puis sur tout segment de $]0, +\infty[$.
2. Montrer que la série de fonctions $\sum \frac{(-1)^n x^n}{n}$ converge uniformément sur $[0, 1]$. Montrer qu'il n'y a pas convergence normale sur $[0, 1]$.
3. Savoir refaire l'exercice classique suivant.

Pour $x \in]1, +\infty[$, on pose $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ et $f_n(x) = \frac{1}{n^x}$.

- (a) Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $I =]1, +\infty[$.
- (b) Montrer que ζ est de classe \mathcal{C}^∞ sur I . Étudier ses variations et sa convexité.
- (c) Donner la limite de ζ en $+\infty$.
- (d) À l'aide d'une comparaison série-intégrale, donner la limite et un équivalent de ζ en 1.
- (e) Tracer l'allure de la courbe représentative de ζ .

Exemples d'exercices (en plus, pas spécifiquement au programme des khôlles, pour indication)

B.E.O. n^{os} 8, 9, 10, 11, 12, 16, 53.