**Programme des colles MP**
**Semaine 11 : 16 au 21 décembre 2024**

# 1 Cours

**Topologie des espaces vectoriels normés**

**Vocabulaire :** Boule, voisinage, ouvert, fermé, intérieur, adhérence, frontière, partie dense.

**Propriétés :** Stabilité par produit, union / union finie, intersection / intersection finie des ouverts, des fermés. Caractérisation séquentielle des points adhérents, caractérisation séquentielle des fermés. Image réciproque d'une partie ouverte ou fermée par une fonction continue.

**Continuité :** Continuité de $f : A \subset E \to F$ où $E$ et $F$ sont des espaces vectoriels normés. Uniforme continuité. Applications $k$-lipschitziennes. Les applications linéaires et multilinéaires avec des espaces de départ de dimension finie sont continues. Critère de continuité des applications linéaires et multilinéaires. Norme d'opérateur, ou norme subordonnée, sur $\mathscr{L}_c(E, F)$ : définition et sous-multiplicativité.

# 2 Questions de cours

1. Une partie $A$ est un fermé si, et seulement si, toute suite convergente d'éléments de $A$ a sa limite qui appartient à $A$.
2. Un point $x$ de $E$ est adhérent à $A$ si, et seulement si, il existe une suite d'éléments de $A$ convergeant vers $x$ (extrait de B.E.O. n°34).
3. Critère de continuité des applications linéaires.
4. Exercice 1 de la B.E.O.
   On note $E$ l'espace vectoriel des applications continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
   On pose : $\forall f \in E$, $\|f\|_\infty = \sup\limits_{t\in[0,1]} |f(t)|$ et $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$.
   (a) Les normes $\| \ \|_\infty$ et $\| \ \|_1$ sont-elles équivalentes ? Justifier.
   (b) Dans cette question, on munit $E$ de la norme $\| \ \|_\infty$.
      i. Soit $u : \left\{\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(0) \end{array}\right.$
         Prouver que $u$ est une application continue sur $E$.
      ii. On pose $F = \{f \in E \ / \ f(0) = 0\}$.
         Prouver que $F$ est une partie fermée de $E$ pour la norme $\| \ \|_\infty$.
   (c) Dans cette question, on munit $E$ de la norme $\| \ \|_1$.
      Soit $c : \left\{\begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 \end{array}\right.$
      On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \left\{\begin{array}{lll} nx & \text{si} & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{n} \\ 1 & \text{si} & \dfrac{1}{n} < x \leqslant 1 \end{array}\right.$
      i. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\|f_n - c\|_1$.
      ii. On pose $F = \{f \in E \ / \ f(0) = 0\}$.
         On note $\bar{F}$ l'adhérence de $F$.
         Prouver que $c \in \bar{F}$. $F$ est-elle une partie fermée de $E$ pour la norme $\| \ \|_1$ ?

---

**Exemples d'exercices (en plus, pas spécifiquement au programme des khôlles, pour indication)**

B.E.O. numéros 34 (adhérence), 35 (caractérisation séquentielle de la continuité), 36 (continuité d'une application linéaire), 37 (normes, ouverts), 38 (norme d'opérateur), 44 (adhérence), 45 (adhérence), 54 (continuité d'une application linéaire) et 58 (continuité d'une application bilinéaire).

---

**Corrigé exercice 1**

1. Raisonnons par l'absurde en supposant que les deux normes sont équivalentes. Il existe $\beta > 0$ tel que

$$\forall f \in E,\ \|f\|_\infty \leqslant \beta \|f\|_1$$

   Posons $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0,1]$, $f_n(x) = x^n$.
   $(f_n)$ est une suite de $E$ donc l'inégalité précédente donne

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant \frac{\beta}{n+1}$$

   En faisant tendre $n$ vers $+\infty$, on obtient $1 \leqslant 0$, c'est absurde. Donc $\| \ \|_\infty$ et $\| \ \|_1$ ne sont pas équivalentes.

2. (a) $u$ est clairement linéaire.
   De plus, $\forall f \in E$, $|u(f)| = |f(0)| \leqslant 1.\|f\|_\infty$.
   Donc $u$ est continue sur $E$ muni de la norme $\| \ \|_\infty$.

   (b) On remarque que $F = u^{-1}(\{0\})$.
   De plus, $\{0\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$.
   Donc $F$ est l'image réciproque d'un fermé, par l'application $u$ continue sur $E$, muni de la norme $\| \ \|_\infty$.
   Donc $F$ est un fermé de $E$ pour la norme $\| \ \|_\infty$.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$.
   $\|f_n - c\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f_n(t) - c(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{n}} |f_n(t) - c(t)|\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{n}}^1 |f_n(t) - c(t)|\,\mathrm{d}t$.
   Or, $\forall t \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]$, $f_n(t) - c(t) = 0$.

   Donc $\|f_n - c\|_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} (1 - nt)\ \mathrm{d}t = \|f_n - c\|_1 = \frac{1}{2n}$.

   (b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n$ est continue sur $\left[0, \dfrac{1}{n}\right[$ et $\left]\dfrac{1}{n}, 1\right]$.

   De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow \left(\frac{1}{n}\right)^+} f_n(x) = \lim_{x \longrightarrow \left(\frac{1}{n}\right)^-} f_n(x) = 1 = f_n\left(\tfrac{1}{n}\right)$ donc $f_n$ continue en $\frac{1}{n}$.
   Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n$ est continue sur $[0,1]$.

   De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(0) = 0$. Donc $(f_n)$ est une suite d'éléments de $F$.

   **Remarque :** le tracé de la courbe de $f_n$ peut suffire à justifier la continuité de $f_n$.

   D'après 3.$(a)$, $\|f_n - c\|_1 = \dfrac{1}{2n}$.
   Donc $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} \|f_n - c\|_1 = 0$.

   Donc la suite $(f_n)$, suite d'éléments de $F$, converge vers $c$ (au sens de la norme $\| \ \|_1$). Donc $c \in \overline{F}$.
   Or $c \notin F$ (car $c(0) = 1 \neq 0$). Donc $F \neq \overline{F}$.
   Donc $F$ n'est pas un fermé pour la norme $\| \ \|_1$.