

Programme des colles MP
Semaine 10 : 9 au 14 décembre 2024

1 Cours

Révisions sur les espaces préhilbertiens réels : tout le chapitre (révisions de MPSI).

2 Méthodes, exercices

- Révisions sur les espaces préhilbertiens : produit scalaire, propriétés sur les normes (dont l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le cas d'égalité dans cette inégalité), orthogonalité (dont le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt), existence et utilisation de bases orthonormées.
- Projections orthogonales. Savoir déterminer le projeté orthogonal d'un vecteur x sur le sous-espace vectoriel F :
 - par résolution du système : $(p_F(x) \in F \text{ et } x - p_F(x) \in F^\perp)$,
 - par formule quand on dispose d'une base orthonormée de F .

Être particulièrement au point sur le cas où $F = D$ de dimension 1 et le cas où F est un hyperplan.

3 Questions de cours

1. Démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et du cas d'égalité (c'est un des exercices de la B.E.O.).
2. Démonstration du théorème de Pythagore en développant $\langle \sum_{i=1}^p v_i | \sum_{j=1}^p v_j \rangle$.
3. Une famille orthogonale sans vecteur nul est libre. En particulier, une famille orthonormale est libre.
4. Écriture d'un vecteur dans une base orthonormée (et expression de $\|x\|^2$).
5. Expression matricielle du produit scalaire et de la norme (propriété 8).
6. Théorème de distance d'un vecteur x à un sous-espace vectoriel F de dimension finie.

Exemples d'exercices (en plus, pas spécifiquement au programme des khôlles, pour indication)

B.E.O. numéros 39 (difficile), 76 (Cauchy-Schwarz), 77 (orthogonal d'un espace), 79 (Cauchy-Schwarz), 80 (projeté orthogonal), 81 (projeté orthogonal), 82 (distance), 92 (orthogonalité sur des matrices).