**Programme des colles MP**
**Semaine 10 : 4 au 8 décembre 2023**

# 1 Cours

**Réduction (2) :** tout le chapitre.

# 2 Méthodes, exercices

— Savoir utiliser un polynôme annulateur pour situer les valeurs propres.

— Dans des situations concrètes, savoir déterminer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal.

— Calcul de $A^n$ : selon les cas il peut être adapté d'appliquer la formule du binôme, de diagonaliser $A$, de calculer le reste dans la division euclidienne de $A$ par $\pi_A$.

# 3 Questions de cours

1. Si $x$ est un vecteur propre de $u \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant $u(x) = \lambda x$ alors pour $P$ polynôme, $P(u)(x) = P(\lambda)x$. Dans le cas particulier où $P$ est un polynôme annulateur de $u$, on a $\mathrm{Sp}(u) \subset \{\text{racines de } P\}$. Un polynôme annulateur est donc utile pour situer les valeurs propres possibles.
2. *Sauf pour les élèves en difficulté.* Lemme de décomposition des noyaux pour 2 polynômes premiers entre eux.
3. B.E.O. n° 68 sans les familles orthonormées (plusieurs façons de montrer qu'une matrice est diagonalisable) recopié ci-dessous.
4. B.E.O. n° 91 (polynôme minimal et calcul de $A^n$) recopié ci-dessous.

---

**Exemples d'exercices (en plus, pas spécifiquement au programme des khôlles, pour indication)**
B.E.O. n° 62, n° 65, n° 70, n° 88, n° 93.

---

**Énoncé exercice 68** Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Démontrer que $A$ est diagonalisable de quatre manières :

1. sans calcul,
2. en calculant directement le déterminant $\det(\lambda \mathrm{I}_3 - A)$, où $\mathrm{I}_3$ est la matrice identité d'ordre 3, et en déterminant les sous-espaces propres,
3. en utilisant le rang de la matrice,
4. en calculant $A^2$.

**Corrigé exercice 68**

1. La matrice $A$ est symétrique réelle donc diagonalisable.
2. On obtient $\chi_M(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I}_3 - A) = \lambda^2(\lambda - 3)$.
   $E_3(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $E_0(A) : x - y + z = 0$.
   Donc $A$ est diagonalisable car $\dim E_3(A) + \dim E_0(A) = 3$.
3. $\mathrm{rg}A = 1$ donc $\dim E_0(A) = 2$.
   On en déduit que 0 est valeur propre au moins double de la matrice $A$.
   Puisque $\mathrm{tr}A = 3$ et que $\mathrm{tr}A$ est la somme des valeurs propres complexes de $A$ comptées avec leur

multiplicité, la matrice $A$ admet une troisième valeur propre qui vaut 3 et qui est nécessairement simple.
Comme dans la question précédente, on peut conclure que $A$ est diagonalisable car

$$\dim E_3(A) + \dim E_0(A) = 3$$

4. On obtient $A^2 = 3A$ donc $A$ est diagonalisable car cette matrice annule le polynôme $X^2 - 3X$ qui est scindé à racines simples.

**Énoncé exercice 91**

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $A$ n'admet qu'une seule valeur propre que l'on déterminera.
2. La matrice $A$ est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer, en justifiant, le polynôme minimal de $A$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $X^n$ par $(X-1)^2$ et en déduire la valeur de $A^n$.

**Corrigé exercice 91**

1. Déterminons le polynôme caractéristique $\chi_A$ de $A$ :

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda & -2 & 1 \\ 1 & \lambda-3 & 1 \\ 1 & -2 & \lambda \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow \sum_{i=1}^{3} C_i}{=} \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 1 \\ \lambda-1 & \lambda-3 & 1 \\ \lambda-1 & -2 & \lambda \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & \lambda-3 & 1 \\ 1 & -2 & \lambda \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{=} (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-1)^3
\end{aligned}$$

Donc $\chi_A = (X-1)^3$.
Donc $A$ admet 1 comme unique valeur propre.

2. Puisque 0 n'est pas valeur propre de $A$, $A$ est inversible.
Si $A$ était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice identité et donc égale à la matrice identité.
Puisque ce n'est pas le cas, $A$ n'est pas diagonalisable.

3. Notons $\pi_A$ le polynôme minimal de $A$.

$\pi_A$ divise $\chi_A$ et $\pi_A$ est un polynôme annulateur de $A$.
$A - \mathrm{I}_3 \neq 0$ et $(A-\mathrm{I}_3)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Donc $\pi_A = (X-1)^2$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par division euclidienne de $X^n$ par $(X-1)^2$, $\exists\,!(Q,R) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}_1[X]$, $X^n = (X-1)^2 Q + R \quad (1)$
Or, $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $R = aX + b$ donc $X^n = (X-1)^2 Q + aX + b$.

Puisque 1 est racine double de $(X-1)^2$ on obtient : $1 = a + b$ et, après dérivation, $n = a$.
Donc $R = nX + 1 - n. \quad (2)$
$\pi_A = (X-1)^2$ étant un polynôme annulateur de $A$ on a d'après (1) et (2) :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = nA + (1-n)\mathrm{I}_3$$