

Programme des colles MP
Semaine 1 : 18 au 22 septembre 2023

1 Cours

Révisions d'analyse : développements limités usuels, primitives usuelles.

Intégrales généralisées : tout le chapitre!

2 Méthodes, exercices

- (révisions) Équivalents, développements limités sans technicité excessive, développements asymptotiques simples à partir de développements limités usuels.
- Calculs d'intégrales sur un segment. Intégration par parties, changement de variable.
- Mise sous forme canonique d'un polynôme du second degré pour calculer des intégrales se ramenant à arctan, par exemple $\int_{-1}^0 \frac{1}{1+t+t^2} dt$.

3 Questions de cours

1. BEO numéro 56 (théorème fondamental de l'intégration).
2. BEO numéro 28 (intégrabilité).
3. Intégrales de référence. α est un réel.

Intégrales de Riemann en l'infini. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Intégrales de Riemann en $b_0 \in \mathbf{R}$.

$\int_a^{b_0} \frac{1}{(b_0 - t)^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

Intégrale exponentielle pour a réel, $\int_0^{+\infty} e^{-at} dt$ converge si et seulement si $a > 0$

4. « Théorème de nullité de l'intégrale » (démonstration dans le cas où f est positive).

Soit f une fonction continue sur I telle que l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge.

Si f est continue, de signe constant sur I et $\int_a^b f(t) dt = 0$, alors : $\forall t \in I, f(t) = 0$.

Exemples d'exercices (en plus, pas spécifiquement au programme des khôlles, pour indication)

- BEO numéro 1 (suites équivalentes, développement asymptotique).
- BEO numéro 26, questions 1 et 2a uniquement.
- Exemples de questions d'intégrabilité :
 - Montrer que $x \mapsto \frac{\ln x}{1+x^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.
 - Montrer que $x \mapsto \frac{e^{-x}}{\sqrt{x^2-4}}$ est intégrable sur $]2, +\infty[$.
 - Montrer que $x \mapsto x^2 e^{-\sqrt{x}}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.
 - Montrer que $x \mapsto \frac{\ln x}{\sqrt{x(x-1)}}$ est intégrable sur $]0, 1[$.