Banque Epreuves Orales **MP**
Corrigé du n° 94 **2023-2024**

Je modernise et complète le corrigé proposé.

---

1. Énoncer le théorème de Bézout dans $\mathbb{Z}$.
2. Soit a et b deux entiers naturels premiers entre eux.
   Soit $c \in \mathbb{N}$.
   Prouver que : $(a|c \text{ et } b|c) \iff ab|c$.
3. On considère le système (S) : $\left\{\begin{array}{lcll} x & \equiv & 6 & [17] \\ x & \equiv & 4 & [15] \end{array}\right.$ dans lequel l'inconnue x appartient à $\mathbb{Z}$.
   (a) Déterminer une solution particulière x_0 de (S) dans $\mathbb{Z}$.
   (b) *Déduire des questions précédentes* la résolution dans $\mathbb{Z}$ du système (S).

---

1. Théorème de Bézout :
   Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$.
   $a \wedge b = 1 \iff \exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2 \ / \ au + bv = 1$.
2. **Version que je trouve plus moderne, en accord avec le programme**
   Ayant $a \wedge b = 1$, la théorème chinois apporte l'isomorphisme d'anneaux suivant.

$$F : \left(\begin{array}{lcl} \mathbb{Z}/ab\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/b\mathbb{Z} \\ \dot{k} & \mapsto & (\overline{k}, \overline{\overline{k}}) \end{array}\right)$$

On a donc

$$\begin{array}{rcl} ab|c & \Leftrightarrow & \dot{c} = \dot{0} \\ & \Leftrightarrow & F(\dot{c}) = (\overline{0}, \overline{\overline{0}}) \text{ puisque } F \text{ est un isomorphisme d'anneaux injectif} \\ & \Leftrightarrow & \begin{cases} \overline{c} & = \overline{0} \\ \overline{\overline{c}} & = \overline{\overline{0}} \end{cases} \\ & \Leftrightarrow & (a|c \text{ et } b|c) \end{array}$$

Version proposée par le corrigé : arithmétique de MPSI
Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$. On suppose que $a \wedge b = 1$.
Soit $c \in \mathbb{N}$. Prouvons que $ab|c \Longrightarrow a|c \text{ et } b|c$.

- Si $ab|c$ alors $\exists k \in \mathbb{Z} \ / \ c = kab$.

Alors, $c = (kb)a$ donc $a|c$ et $c = (ka)b$ donc $b|c$.
Prouvons que $(a|c \text{ et } b|c) \Longrightarrow ab|c$.

$a \wedge b = 1$ donc $\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2 \ / \ au + bv = 1$. (1)
De plus $a|c$ donc $\exists k_1 \in \mathbb{Z} \ / \ c = k_1 a$. (2)
De même, $b|c$ donc $\exists k_2 \in \mathbb{Z} \ / \ c = k_2 b$. (3)
On multiplie (1) par c et on obtient $cau + cbv = c$.
Alors, d'après (2) et (3), $(k_2 b)au + (k_1 a)bv = c$, donc $(k_2 u + k_1 v)(ab) = c$ et donc $ab|c$.
On a donc prouvé que $(a|c \text{ et } b|c) \iff ab|c$.

3. (a) **Méthode apportée par le cours**

 — Écrire une relation de Bézout entre les deux entiers premiers entre eux.

 — En déduire x_1 et x_2 vérifiant :

$$\begin{cases} x_1 & \equiv 1[17] \\ x_1 & \equiv 0[15] \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x_2 & \equiv 0[17] \\ x_2 & \equiv 1[15] \end{cases}$$

 — En déduire la solution particulière $x_0 = 6x_1 + 4x_2$.

$$\begin{aligned} 17 &= 15 + 2 \\ 15 &= 2 \times 7 + 1 \\ 1 &= 8 \times 15 - 7 \times 17 \end{aligned}$$

On prend donc $x_1 = 8 \times 15$ et $x_2 = -7 \times 17$. Puis on prend $x_0 = 6x_1 + 4x_2 = 244$.

Remarque :
En observant le système (S), on peut remarquer que $x_0 = -11$ est une solution particulière.
Cette méthode est évidemment plus rapide mais ne fonctionne pas toujours.

(b) x_0 solution particulière de (S) donc $\left\{ \begin{array}{lll} x_0 & \equiv & 6 \quad [17] \\ x_0 & \equiv & 4 \quad [15] \end{array} \right.$.

On en déduit que x solution de (S) si et seulement si $\left\{ \begin{array}{lll} x - x_0 & \equiv & 0 \quad [17] \\ x - x_0 & \equiv & 0 \quad [15] \end{array} \right.$

c'est-à-dire x solution de $(S) \iff (17|(x - x_0)$ et $15|(x - x_0))$.
Or $17 \wedge 15 = 1$ donc d'après 2.,

$$x \text{ solution de (S)} \iff (17 \times 15)|(x - x_0)$$

Donc l'ensemble des solutions de (S) est $\{x_0 + 17 \times 15k,\ k \in \mathbb{Z}\} = \{244 + 255k,\ k \in \mathbb{Z}\}$.
