Banque Epreuves Orales **MP**
Corrigé du n° 31 **2023-2024**

Suite au changement de programme, je modifie et complète le corrigé proposé.

---

1. Déterminer une primitive de $x \longmapsto \cos^4 x$.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' + y = \cos^3 x$ en utilisant la méthode de variation des constantes.

---

1. On linéarise $\cos^4 x$.

$$\begin{aligned}
\cos^4 x &= \left(\frac{e^{\mathrm{i}x}+e^{-\mathrm{i}x}}{2}\right)^4 \\
&= \frac{1}{2^4}(e^{4\mathrm{i}x}+4e^{2\mathrm{i}x}+6+4e^{-2\mathrm{i}x}+e^{-\mathrm{i}4x}) \\
&= \frac{1}{2^4}(2\cos(4x)+8\cos(2x)+6) \\
&= \frac{1}{8}\left(\cos(4x)+4\cos(2x)+3\right)
\end{aligned}$$

Donc, $x \longmapsto \frac{1}{32}\sin(4x)+\frac{1}{4}\sin(2x)+\frac{3}{8}x$ est une primitive de $x \longmapsto \cos^4 x$.

2. Notons (E) l'équation différentielle $y''+y=\cos^3 x$.
C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
On pose $f_1(x)=\cos x$ et $f_2(x)=\sin x$. On a $\mathcal{S}_H=\mathrm{Vect}(f_1,f_2)$.
On recherche une solution particulière par la méthode de variation des constantes. Pour cela, on met le système sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{=A}\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \cos^3(x) \end{pmatrix}}_{=B}$$

On cherche la solution particulière sous la forme $Y(x)=\lambda(x)\underbrace{\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_1'(x) \end{pmatrix}}_{=Y_1}+\mu(x)\underbrace{\begin{pmatrix} f_2(x) \\ f_2'(x) \end{pmatrix}}_{=Y_2}$.

$$\begin{aligned}
Y'=AY+B &\Leftrightarrow \lambda'Y_1+\lambda Y_1'+\mu'Y_2+\mu Y_2'=AY+B \\
&\Leftrightarrow \lambda'Y_1+\mu'Y_2=B \\
&\Leftrightarrow \lambda'(x)\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_1'(x) \end{pmatrix}+\mu'(x)\begin{pmatrix} f_2(x) \\ f_2'(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ \cos^3(x) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On cherche donc λ et μ tels que $\begin{cases} \lambda'(x)\cos(x)+\mu'(x)\sin(x) &= 0 \\ -\lambda'(x)\sin(x)+\mu'(x)\cos(x) &= \cos^3(x) \end{cases}$.
$(\cos x)L_2+(\sin x)L_1$ donne $\mu'(x)=\cos^4(x)$.
$(\cos x)L_1-(\sin x)L_2$ donne $\lambda'(x)=-\sin(x)\cos^3(x)$.
$\lambda(x)=\frac{1}{4}\cos^4 x$ convient.

D'après la question 1., $\mu(x)=\frac{1}{32}\sin(4x)+\frac{1}{4}\sin(2x)+\frac{3}{8}x$ convient.
On en déduit que la fonction y_p définie par $y_p(x)=\frac{1}{4}\cos^5 x+\left(\frac{1}{32}\sin(4x)+\frac{1}{4}\sin(2x)+\frac{3}{8}x\right)\sin x$

est une solution particulière de (E).
Finalement, les solutions de l'équation (E) sont les fonctions y définies par : $y(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x + y_p(x),\ \text{avec}\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
