Pour éviter du dénombrement, je complète le corrigé proposé (il s'agit donc d'une troisième façon de faire).

---

Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 3.
On dispose de $n$ boules numérotées de 1 à $n$ et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3.
On lance simultanément les $n$ boules.
Elles viennent toutes se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments. Chaque compartiment peut éventuellement contenir les $n$ boules.
On note $X$ la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.

1. $X$ peut valoir 0 (tous les compartiments contiennent au moins une boule), ou 1 (les boules vont toutes dans 2 compartiments seulement), ou 2 (toutes les boules vont dans le même compartiment).
   $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.
2. (a) $(X = 2) = E_1 \cup E_2 \cup E_3$ avec $E_1$ : « toutes les boules vont dans le compartiment 1 », $E_2$ : « toutes les boules vont dans le compartiment 2 » et $E_3$ : « toutes les boules vont dans le compartiment 3 ». C'est la réunion de 3 événements disjoints donc

$$P(X = 2) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) = 3P(E_1) \text{ par symétrie du rôle des 3 compartiments}$$

   Notons $U_i$ : « la boule numérotée $i$ va dans le compartiment 1 »
   $P(E_1) = P(U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n) = P(U_1)P(U_2) \ldots P(U_n) = (\frac{1}{3})^n$ puisque les placements des boules dans les compartiments sont indépendants.
   $\boxed{P(X = 2) = (\frac{1}{3})^{n-1}}$

   (b) Commençons par déterminer $P(X = 1)$.
   Notons $D_i$ : « la boule numérotée $i$ va dans le compartiment 2 » et $B$ : « toutes les boules vont dans les compartiments 1 et 2, sans qu'aucun de ces compartiments ne soit vide ». On constate que :

$$B \cup (U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n) \cup (D_1 \cap D_2 \cap \cdots \cap D_n) = (U_1 \cup D_1) \cup \cdots \cup (U_n \cup D_n)$$

   donc $P(B) + (\frac{1}{3})^n + (\frac{1}{3})^n = (\frac{2}{3})^n$ et donc $P(B) = (\frac{2}{3})^n - 2(\frac{1}{3})^n$.
   Terminons en remarquant que $(X = 1)$ est l'union disjointe des trois événements suivants, de même probabilité :
   - $B$ qu'on vient d'observer,
   - « toutes les boules vont dans les compartiments 1 et 3, sans qu'aucun de ces compartiments ne soit vide »
   - « toutes les boules vont dans les compartiments 3 et 2, sans qu'aucun de ces compartiments ne soit vide »

   Donc $P(X = 1) = 3((\frac{2}{3})^n - 2(\frac{1}{3})^n)$. $\boxed{P(X = 1) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(2^n - 2)}$

   Enfin, $P(X = 0) = 1 - P(X = 2) - P(X = 1)$ donc $P(X = 0) = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(2^n - 2)$.
   $\boxed{P(X = 0) = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(2^n - 1)}$
3. (a) $E(X) = 0P(X = 0) + 1P(X = 1) + 2P(X = 2) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(2^n - 2) + 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$. $\boxed{E(X) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^n}$

   (b) D'après 3.(a), $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X) = \lim\limits_{n\to+\infty} 3\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$.
   Quand le nombre de boules tend vers $+\infty$, en moyenne aucun des trois compartiments ne reste vide.

---